

山东科技大学2020年全国硕士研究生招生考试 数学分析试卷

一、极限问题 (16 分)

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ 。

2、设 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限。

二、一元函数的导数问题 (18 分)

1、 $y^2 + 2 \ln y = \sin^2 x$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

2、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{4x} - e^x}{x}, & x < 0, \\ ax + b \cos x, & x \geq 0. \end{cases}$ 求 a, b 使得 $f(x)$ 处处可导, 并求 $f'(x)$ 。

三、一元函数积分问题 (18 分)

1、求不定积分 $\int \sin \sqrt{x} dx$ 。

2、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$ 。

四、应用题 (11 分)

设半径为 R 的半球形水池充满水, 现将水从池中抽出, 当抽出水所做的功为将全部水抽完所做的功一半时, 问水下降的高度 h 为多少?

五、综合题 (12 分)

设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明: (1) $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界; (2) $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是否一致连续, 并证明。

六、级数问题 (12 分)

将函数 $f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的和。

七、讨论函数的连续性和可微性 (12 分)

设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy + \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 讨论该函数在 $(0, 0)$ 点 (1) 连续性; (2) 偏导数的存在性; (3) 可微性; (4) 偏导数的连续性。

八、计算积分(10 分)

$$\int_0^{+\infty} e^{-5x} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{x} dx.$$

九、求体积问题 (12 分)

求由曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 与曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ($z > 0$) 所围成的封闭区域的体积。

十、曲线积分问题 (10 分)

求第一型曲线积分: $\int_C y^2 ds$, 其中曲线 C 为摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一拱。

十一、曲面积分问题 (10 分)

计算第二型曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 Σ 是球面

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, 方向取外侧。

十二、证明不等式 (9 分)

设 n 为正整数, 证明不等式 $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $x, y > 0$ 。