山东科技大学2020年全国硕士研究生招生考试

高等代数试卷

一、计算题（每小题 10 分，共 60 分）。

1. 计算 $n+1$ 阶行列式：$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$（其中 $a_i \neq 0,\ i=1,2,\cdots,n$）。

2. 计算 n 阶行列式：$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$（其中 $\alpha-\beta\neq 0$）。

3. 已知 n 阶矩阵 A 的最小多项式为 x^2+3x-4，试证矩阵 $A+E$ 可逆并求其逆。

4. 已知三阶矩阵 A 的 3 个特征值分别为 1，2，3，求三阶矩阵 $B=A^*+A^2+2A-4E$ 的行列式。

5. 已知三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 13 & a & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ b & -8 & -7 \end{pmatrix}$，$A$ 的一个特征值 λ 对应特征向量为 $\alpha=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。（1）求参数 a,b 及特征值 λ 的值；（2）矩阵 A 是否相似于对角矩阵？如果不能请写出其 Jordan 标准形。

6. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ 的一个极大线性无关组，并用此极大线性无关组表示其余向量。

二、证明题（每小题 10 分，共 40 分）。

1. 已知 n 阶矩阵 A 和 B 满足 $A+B=AB$，试证明 $\text{秩}(A)=\text{秩}(B)$。

2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$（$s\geq 3$）线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s$，$\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$，试问向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是否线性相关？并证明你的结论。

3. 证明：如果 $(x^4+x^3+x^2+x+1)\mid f_1(x^5)+xf_2(x^5)$，那么 $(x-1)\mid f_1(x)$ 并且 $(x-1)\mid f_2(x)$。

4. 设 σ 是向量空间 V 的线性变换，且 $\sigma^2=I$（其中 I 表示单位变换），试证明 $V=\mathrm{Im}(\sigma+I)\oplus\mathrm{Im}(\sigma-I)$，其中 $\mathrm{Im}\,\sigma=\left\{\alpha\in V\,\middle|\,\exists\beta\in V,\sigma(\beta)=\alpha\right\}$。

三、计算题（15 分）。

设有向量 $\beta=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$ 和向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\b\\2b\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，问 a,b 取何值时向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？何时能由其线性表出？在 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出时写出所有的表出方式。

四、计算题（20 分）。

已知

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix},$$

求一正交矩阵 P 使 P^TAP 成对角形（其中 P^T 表示矩阵 P 的转置矩阵），并求此对角形。

五、证明题（15 分）。

设 V 是数域 R 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，$U=\{k(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\,|\,k\in R\}$，

$W=\{\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\,|\,\sum_{i=1}^{n}k_i=0,k_i\in R\}$。

（1） 证明 U 和 W 分别为 V 的子空间。

（2） 分别求 U 和 W 的一组基与维数。

（3） 证明 $V=U\oplus W$。