

2、设 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

验证 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 是三维空间 R^3 的一个基, 并求 $\vec{b}$ 在这个基中的坐标.

四、解答题 (每小题 15 分, 共 30 分)

1、设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-2, 1, -1$, 已知 A^* 为 A 的伴随矩阵. 求 $A^* + 4A - 2E$ 的特征值, 并计算 $|A^* + 4A - 2E|$.

2、求一个正交变换 $x = py$, 把二次型 $f = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$ 化成标准型.

五、(本题 20 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 为实对称矩阵,

(1) 已知 A 的一个特征值为 3, 求 y 的值, 并计算 A^2 ;

(2) 求正交矩阵 P , 使 $P^{-1}A^2P = \Lambda$ 为对角矩阵.

六、(本题 10 分) 已知 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}$ 均为 n 维列向量, 证明: $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $\vec{\beta}$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ 惟一线性表示.

山东科技大学2020年全国硕士研究生招生考试 线性代数试卷

一、计算下列行列式(每小题 10 分, 共 20 分)

$$1、D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$2、D_n = \begin{vmatrix} a_1-1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2-1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n-1 \end{vmatrix}.$$

二、计算题(每题 10 分, 共 40 分)

$$1、\text{设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{证明 } A \text{ 可逆并求 } A^{-1}.$$

$$2、\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{求解矩阵方程 } AXB = C.$$

3、求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4、\text{设向量组 } \vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 的秩为 } 2, \text{求 } a, b.$$

三、解答题(每题 15 分, 共 30 分)

1、已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1. \end{cases}$$

求该非齐次线性方程组的通解, 并写出对应的齐次线性方程组的基础解系.